I. Conjuntos

1. Introdução e notações

A teoria dos conjuntos foi desenvolvida por volta do ano 1872 pelo matemático alemão Georg Cantor (1845 / 1918) e aperfeiçoada no início do século XX por outros matemáticos, entre eles, Ernst Zermelo (alemão - 1871/1956), Adolf Fraenkel (alemão - 1891/ 1965), Kurt Gödel (austríaco - 1906 /1978), Janos von Newman (húngaro - 1903 /1957), entre outros.

No dia-a-dia utilizamos muitos termos que transmitem a ideia de conjunto: turma, rebanho, banda de música, enxame, …

Vejamos uma possível definição de conjunto, num determinado universo *U*.

Definição

Um **conjunto** é uma colecção de elementos com uma ou mais características comuns.

Usualmente utilizam-se letras maiúsculas A, B, S, … X para representar conjuntos.

Relação de pertença

Num conjunto está implicitamente definida a relação de **pertença** dum objecto, utilizando-se o símbolo $\in$ para a designar. Assim,

$a \in \mathrm{A}$ significa que

"*a* está em A"

"*a* é um elemento do conjunto A"

"*a* é um objecto do conjunto A"

"*a* pertence a A"

enquanto que

$b \notin \mathrm{A}$ significa que

"*b* não está em A"

"*b* não é um elemento do conjunto A"

"*b* não é um objecto do conjunto A"

"*b* não pertence ao conjunto A"

Exemplo

Considere-se o conjunto A={⊗, ♣, ♫, ☻, ♥, ۞}. Assim, dizemos que

$\otimes \in A$ e lê-se "⊗ é um objecto do conjunto A";

$\circ \notin \mathbf{A}$ e lê-se "∘ não é um elemento do conjunto A".

Modos de representar um conjunto

Podemos representar um conjunto de duas maneiras diferentes: em **extensão** ou em **compreensão**.

Definições

Um conjunto diz-se representado em

i) **compreensão** se colocarmos entre (de) chavetas a(s) propriedade(s) que caracteriza(m) todos os elementos do conjunto;

ii) **extensão** se listarmos todos os elementos que pertencem ao conjunto.

Exemplos

Seja B o conjunto formado pelos números pares maiores que 1 e menores que 11.

Em compreensão, representamo-lo na seguinte forma:

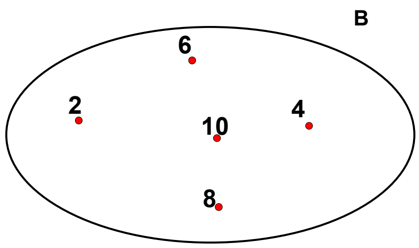
B = {números pares maiores que 1 e menores que 11}.

Em extensão podemos representá-lo de duas formas:

i) escrever entre chavetas os seus elementos, separando-os por vírgulas

B = {2,4,6,8,10} ou B = {dois, quatro, seis, oito, dez},

ii) escrever dentro de uma região limitada por uma linha curva fechada os elementos, fazendo corresponder um ponto a cada um deles – **Diagrama de Venn[1].**



Observação

É de notar que a ordem da escrita dos elementos ou a sua repetição não alteram o conjunto. Deste modo, A = {1,2,3} = {3,2,1} = {2,1,3}= {1,1,1,2,3,3}.

[1] Estes diagramas são assim designados em homenagem ao matemático inglês John Venn (1834-1923).

Classificação de conjuntos quanto ao número de elementos

Definição

Chama-se **cardinal** de um conjunto, e representa-se por #, ao número de elementos que ele possui.

Exemplo

Por exemplo, se A ={45,65,85,95} então #A = 4.

Definições

Dois conjuntos dizem-se **equipotentes** se têm o mesmo cardinal.

Um conjunto diz-se

i) **infinito** quando não é possível enumerar todos os seus elementos

ii) **finito** quando é possível enumerar todos os seus elementos

iii) **singular** quando é formado por um único elemento

iv) **vazio** quando não tem elementos

Exemplos

IN é um conjunto infinito (O cardinal do conjunto IN (#IN) é infinito (∞));

A = {½, 1} é um conjunto finito (#A = 2);

B = {Lua} é um conjunto singular (#B = 1)

{ } ou ∅ é o conjunto vazio (#∅ = 0)

Observação

Note que uma mesma propriedade, em diferentes universos, poderá definir conjuntos diferentes. Por exemplo a propriedade "x é um número menor do que 10" define,

i) no universo IN dos números naturais, o conjunto A = {1,2,…,9}

ii) no universo {números pares}, o conjunto B = {2,4,6,8}.

Noção de correspondência

Definições

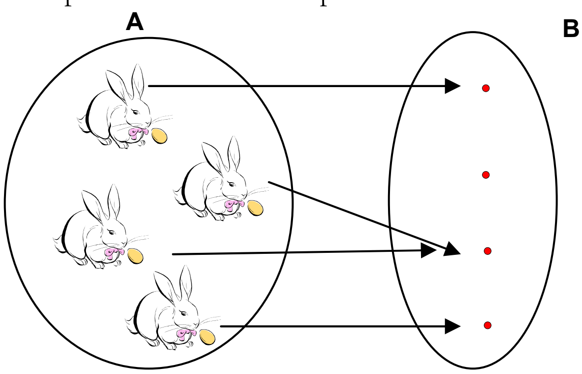
Sejam A e B dois conjuntos.

Se a cada elemento de A fizermos corresponder um e um só elemento de B, diz-se que fica estabelecida uma **correspondência unívoca** entre A e B.

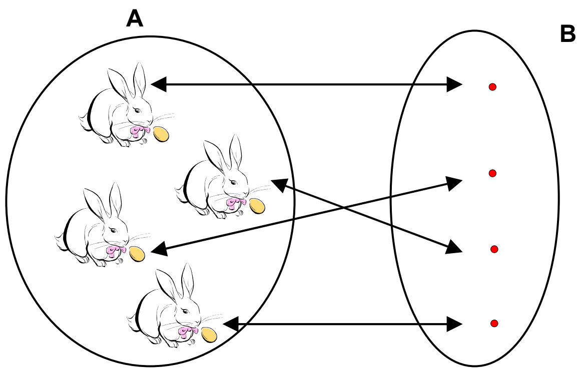
Se a cada elemento do conjunto A corresponder um e um só elemento de B e a cada elemento do conjunto B um e um só elemento do conjunto A diz-se que fica estabelecida uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

Exemplos

No seguinte esquema está representada uma correspondência unívoca.



enquanto que em



temos representada uma correspondência biunívoca.

Observação

Diz-se que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos, quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca entre esses conjuntos.

2. Relações entre conjuntos

Definição

Dois conjuntos dizem-se **disjuntos** se não possuem nenhum elemento em comum.

Exemplo

Os conjuntos M = {cão, ovelha, homem, baleia} e T = {galinha, avestruz, peru} são conjuntos disjuntos.

Definição

Dois conjuntos A e B dizem-se **idênticos**, e escreve-se $A = B$, quando são compostos dos mesmos elementos. Caso contrário, dizem-se **diferentes**, e escreve-se $A \neq B$.

Exemplo

Os conjuntos

D = {números naturais maiores que sete e menores que dez} e $E = \{8, 3^2\}$

são conjuntos idênticos.

Os conjuntos E (definido anteriormente) e $F = \{8,9,10,45\}$ são diferentes.

Definição

Dados A e B conjuntos quaisquer, diz-se que A **é um subconjunto** de B, e escreve-se $A \subseteq B$, quando todo o elemento de A for também um elemento de B.

Sempre que $A \subseteq B$ (com $A \neq \emptyset$) mas $A \neq B$, ou seja, se existir um elemento de B que não seja elemento de A, então A diz-se um **subconjunto próprio** de B e escreve-se $A \subset B$.

Observações

1) Quando $A \subseteq B$ diz-se também que

“A é parte de B” “A está incluído em B” ou ainda que “A está contido em B”.

2) Dizer que “A está **contido** em B” ($A \subseteq B$) significa o mesmo do que “B **contém** A”, e escreve-se $B \supseteq A$.

Exemplo

Para os conjuntos A={♣, ♫, ☻, ♥, ۞} e B={♣, ♫, ۞} tem-se $B \subseteq A$.

Propriedades da relação inclusão

Sejam A e B conjuntos quaisquer dum determinado universo *U*.

A relação inclusão é:

- reflexiva, isto é, $A \subseteq A$

  (Qualquer conjunto é subconjunto de si próprio)
- antisimétrica, isto é, se $A \subseteq B$ e se $B \subseteq A$ então $A = B$
- transitiva, isto é, se $A \subseteq B$ e se $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$

Sugestão

Ilustre as propriedades anteriores através de um exemplo.

Observações

1) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto A ($\emptyset \subseteq A$)

2) O conjunto vazio e o conjunto A chamam-se subconjuntos **impróprios** de A. Os restantes subconjuntos de A dizem-se **próprios.**

Definição

Dados C e D conjuntos quaisquer, diz-se que C **não está contido** em D, e escreve-se $C \not\subseteq D$, se existe pelo menos um elemento de C que não pertence a D.

Observação

Neste caso diz-se também que C **não é uma parte** de D ou que C **não é um subconjunto** de D.

3. Conjuntos de conjuntos

A partir dum conjunto S podemos formar um novo conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de S.

Definição

Dado um conjunto S, chama-se **conjunto das partes** ou **conjunto potência de S**, e representa-se por *P* (S), ao conjunto de todos os subconjuntos de S.

Exemplo

Sendo S = {0,2,5}, *P* (S) ={ ∅, {0},{2},{5},{0,2},{0,5},{2,5},{0,2,5}}

Observações

1) É de notar que, qualquer que seja S, *P* (S) ≠ ∅ já que ∅ e S são subconjuntos de S, e portanto pertencem a *P* (S).

2) Todo o conjunto finito com n elementos tem 2^n subconjuntos, ou seja

Se #S = n então # *P* (S) = 2^n.

4. Operações unárias e operações binárias com conjuntos

Seja S um conjunto num determinado universo de definição *U*.

Definição

* é uma **operação unária** em S se para cada elemento x de S existir um elemento x' único associado a x, por intermédio da operação *.

Observação

Repare que se * é uma operação unária três condições são verificadas

- existe x' associado a x
- x' é único
- x' é um elemento de S.

Exemplos

Em IN, a operação que a cada elemento faz corresponder o seu dobro é uma operação unária

$$\begin{aligned} *: IN &\to IN \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Definição

$ é uma **operação binária** em S se para cada par de elementos x, y de S existir um elemento único, representado por $x \,\$\, y$, resultado da operação $ no par (x,y).

Observação

Afirmar que $ não é uma operação binária em S é dizer que pelo menos uma das três condições seguintes se verifica

- existem pares (x,y) de elementos de S para os quais $x \,\$\, y$ não está definido
- existem elementos para os quais $x \,\$\, y$ não é único
- existem pares (x,y) de elementos de S para os quais $x \,\$\, y$ não pertence a S

Exemplo

Em **IN**, a operação que a cada par de elementos faz corresponder a sua soma é uma operação binária

$$\begin{aligned} +: IN \times IN &\to IN \\ (x,y) &\mapsto x+y \end{aligned}$$

5. Operações com conjuntos

5.1. Intersecção de conjuntos

Definições

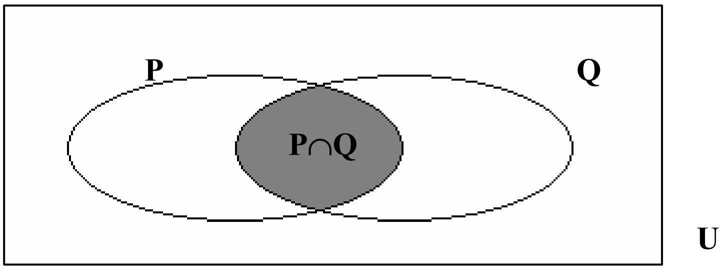
i) A **intersecção de conjuntos** é uma operação binária que a cada par P, Q de conjuntos faz corresponder o conjunto representado por P∩Q e definido por:

$$P \cap Q = \{x: x \in P \text{ e } x \in Q\}$$

(composto pelos elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos P e Q)

ii) Sempre que não exista um elemento de P que pertença a Q, isto é, se $P \cap Q = \emptyset$, os conjuntos P e Q dizem-se **disjuntos**.

Em termos de diagramas de Venn, tem-se:



Propriedades da intersecção de conjuntos

Considerem-se P, Q e R, conjuntos dum determinado universo de definição *U*.

Propriedade comutativa $P \cap Q = Q \cap P$

Propriedade associativa $(P \cap Q) \cap R = P \cap (Q \cap R)$

Idempotência $P \cap P = P$

Existência de elemento neutro $P \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \cap P = P$

A intersecção de um qualquer conjunto com o universo é o próprio conjunto.

Existência de elemento absorvente (aglutinador)

$$P \cap \emptyset = \emptyset \cap P = \emptyset$$

A intersecção de um qualquer conjunto com o conjunto vazio é o conjunto vazio.

Exemplos

Para A={♣, ♫, ☻, ♥, ۞}, B={♣, ♫, ۞} e C={♣, ♥, ۞}, a propriedade associativa é verificada,

(A ∩ B) ∩ C = {♣, ۞} = A ∩ (B ∩ C)

5.2. Reunião de conjuntos

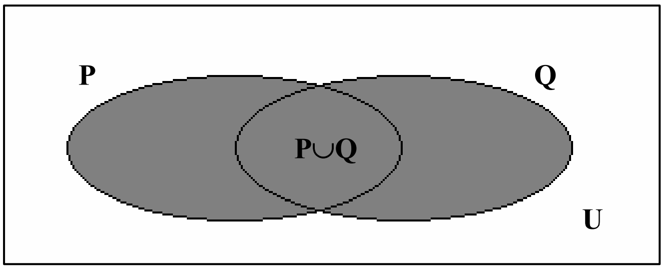
<u>**Definição**</u>

A **reunião** de conjuntos é uma operação binária que a cada par P, Q de conjuntos faz corresponder o conjunto representado por $P \cup Q$ e definido por:

$$P \cup Q = \{x: x \in P \text{ ou } x \in Q\}$$

(composto pelos elementos que pertencem, <u>pelo menos</u>, a um dos conjuntos P e Q)

Em termos de diagramas de Venn, tem-se:



<u>Propriedades da reunião de conjuntos</u>

Sejam P, Q e R, conjuntos dum determinado universo de definição *U*.

<u>**Propriedade comutativa**</u> $P \cup Q = Q \cup P$

<u>**Propriedade associativa**</u> $(P \cup Q) \cup R = P \cup (Q \cup R)$

<u>**Idempotência**</u> $P \cup P = P$

<u>**Existência de elemento neutro**</u> $P \cup \emptyset = P$

A reunião de um qualquer conjunto com o vazio é o próprio conjunto.

<u>**Existência de elemento absorvente (aglutinador)**</u>

$$P \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$$

A reunião de um qualquer conjunto com o universo é o próprio universo.

<u>**Exemplos**</u>

Para A={♣, ♫, ☻, ♥, ۞}, B={♣, ♫, ۞} e C={♣, ♥, ۞}, a propriedade associativa é verificada,

$(A \cup B) \cup C$ = {♣, ♫, ☻, ♥, ۞} = $A \cup (B \cup C)$

5.3. Propriedades distributivas da intersecção e reunião de conjuntos

1) **Propriedade distributiva da intersecção em relação à reunião de conjuntos**

$$P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$$

2) **Propriedade distributiva da reunião em relação à intersecção de conjuntos**

$$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

Sugestão: Verifique as propriedades anteriores para os conjuntos A={♣, ♫, ☻, ♥, ۞}, B={♣, ♫, ۞} e C={♣, ♥, ۞}.

5.4. Complementação de conjuntos

Definição

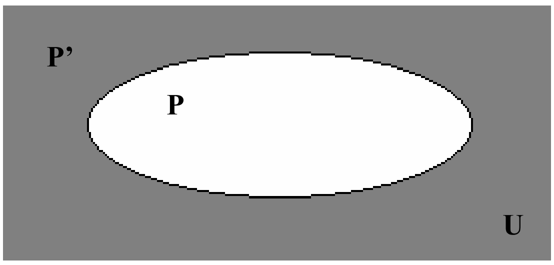
A **complementação de conjuntos** é uma operação unária que a cada conjunto P faz corresponder o conjunto representado por **P'** ou $\overline{\mathbf{P}}$ definido por:

$$\mathbf{P}' = \{x : x \in U \text{ e } x \notin \mathbf{P}\},$$

onde *U* é o universo de definição do conjunto.

P' diz-se **o complementar de P no universo *U*.**

Em termos de diagrama de Venn, tem-se



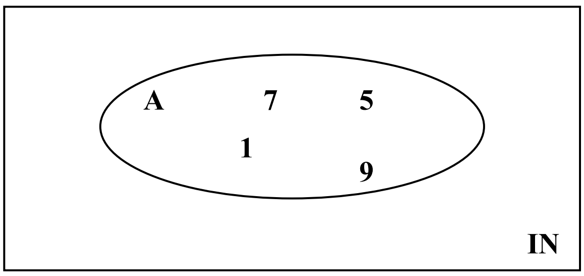
P' é representado pela parte de *U* a sombreado

Exemplo

Considere o universo IN e o conjunto A definido por: A = {1,5,7,9}.

Então o complementar do conjunto A é :

A' = $\{x : x \in \mathbf{IN} \text{ e } x \notin \mathbf{A}\} = \{2,3,4,6,8,10,11,12,\ldots\}$



Propriedades da complementação de conjuntos

1) Dupla negação

$(P')' = P$

O complementar do complementar de um conjunto é o próprio conjunto.

2) $P \cap P' = P' \cap P = \varnothing$

A intersecção de um conjunto qualquer com o seu complementar é o conjunto vazio.

3) $P \cup P' = U$

A reunião de um conjunto qualquer com o seu complementar é o universo.

4) Leis de De Morgan

i) $(P \cap Q)' = P' \cup Q'$

O complementar da intersecção de dois conjuntos é igual à reunião dos complementares dos conjuntos.

ii) $(P \cup Q)' = P' \cap Q'$

O complementar da reunião de dois conjuntos é igual à intersecção dos complementares dos conjuntos.

Sugestão

Verifique as Leis de De Morgan para os conjuntos A={♣, ♫, ☻, ♥}, B={♣, ♦, ☺, ☻, ☼, ◘} definidos no Universo U={♣, ▪, ♫, ☻, ♥, ♦, ☺, ☼, ◘, ▼}.

Observações

É possível provar-se, ainda, a veracidade das seguintes proposições

i) $U' = \varnothing$

O complementar do universo é o conjunto vazio.

ii) $\varnothing' = U$

O complementar do vazio é o universo.

5.4.1. Complementar dum conjunto em relação a outro

Definição

Uma outra operação entre conjuntos é a diferença, que a cada par A, B de conjuntos faz corresponder o conjunto definido por:

$$A - B = C_A B = A \backslash B$$

que se diz a **diferença entre A e B** ou o **complementar de B em relação a A** ou **A excepto B**.

A este conjunto pertencem os elementos de A que não pertencem a B.

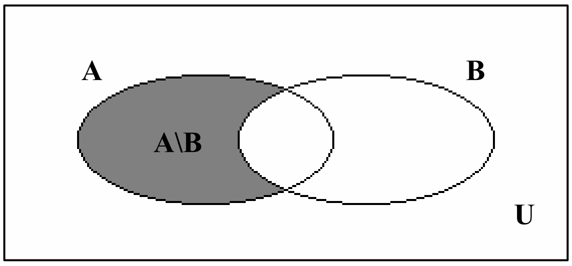
$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Observações

Repare-se que

$$A \backslash B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\} = A \cap B'$$

Em termos de diagramas de Venn, tem-se:



A\B é representado pela parte de *U* a sombreado.

Organizado por: Ana Patrícia Martins e Helena Gomes